

[MO17] Komplexné čísla

Prečo komplexné čísla?

Napr. v riešení rovníc. Nie každá rovnica má v obore reálnych čísel riešenie. Napr. pre $x \in \mathbb{R}$ je $x^2+1>0$. Z toho však vyplýva, že rovnica $x^2+1=0$ nemá riešenie v obore reálnych čísel. Preto treba rozšíriť obor reálnych čísel o taký odbor, v ktorom by toto riešenie bolo.

Definícia

Definujeme rovnosť, súčet a súčin usporiadaných dvojíc reálnych čísel takto:

$$(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow a=c, b=d$$

$$(a,b)\pm(c,d)=(a\pm c, b\pm d)$$

$$(a,b)*(c,d)=(a*c-b*d, a*d+b*c)$$

Pod množinou komplexných čísel rozumieme množinu všetkých usporiadaných dvojíc reálnych čísel (a,b) , $a,b \in \mathbb{R}$, pre ktoré platia horeuvedené vzťahy. Množinu všetkých komplexných čísel označujeme písmenom \mathbb{C} .

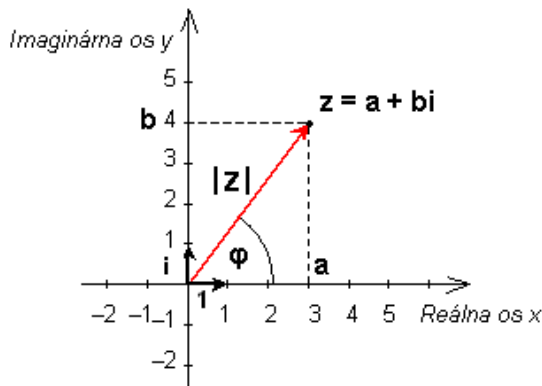
Pre súčin a súčet komplexných čísel platia rovnaké zásady ako pre reálne čísla ($(c_1+c_2)*c_3=c_1*c_3+c_2*c_3$).

Komplexné číslo tvaru $(a,0)$ pre $a \in \mathbb{R}$ je: $\underline{(a,0) = a}$, pričom a je reálne číslo ako ho bežne poznáme. Teda množina \mathbb{R} je podmnožinou \mathbb{C} . A teda každá rovnica má koreň v obore komplexných čísel.

V množine \mathbb{C} sa nedá zaviesť relácia $<$ tak, aby mala všetky vlastnosti, ktoré má táto relácia v obore \mathbb{R} .

Pre lepšiu predstavu

„Číselná os má rozmedzie od mínus nekonečna $-\infty$ až po plus nekonečno $+\infty$. Keď si túto os predstavíme ako priamku, ktorá leží v rovine, logicky sa spýtame, či aj v iných bodoch roviny okrem bodov tejto priamky môžeme nájsť nejaké čísla. Ukazuje sa, že áno. Aj v iných miestach roviny sa nachádzajú čísla. Tieto čísla nazývame imaginárne čísla. Dokopy so všetkými reálnymi číslami tvoria množinu všetkých komplexných čísel. Definoval ich nemecký matematik Gauss a podľa neho sa aj táto rovina čísel pomenovala Gaussova rovina. Túto rovinu rozdeľujú dve osi - už spomínaná číselná os, ktorú budeme pokladať za os x (reálna os) a na ňu kolmá os y (imaginárna os). Obe tieto osi sa pretínajú v bode $[0;0]$..“



Uhol φ tiež nazývame amplitúda komplexného čísla ako orientovaný uhol v oblúčovej miere. Komplexné čísla sú v podstate ako vektory. Sčítavame ich rovnako ako vektory v priestore akurát súčin a podiel sú trochu odlišné, kde dochádza aj k práci s amplitúdami čísel.

- **Algebraický tvar komplexného čísla**

Označme komplexné číslo $(0,1)$ písmenom i . Toto komplexné číslo sa nazýva aj imaginárna jednotka. Pretože platí $(a,0) = a$:

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0)*(0,1) = a + b*i$$

Výraz $a+b*i$ sa nazýva algebraický tvar komplexného čísla (a,b) . Číslo a je reálna a číslo b imaginárna časť čísla.

Imaginárne komplexné = komplexné číslo tvaru $a+b*i$, kde $b \neq 0$

Rýdzo imaginárne číslo = reálna časť tohto čísla je rovná nule $\Rightarrow b*i$, kde $b \neq 0$

Mocnina

Nech $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$ potom $\frac{z^n = z * z * \dots * z}{n \text{ Činitelov}}$.

-> Skúste vypočítať i^2

Pre mocniny čísla i platia vzťahy:

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i$$

Počítanie s komplexnými číslami v algebraickom tvare

$$(a+bi) \pm (c+di) = (a \pm c) + (b \pm d)i \quad | \text{pre } b, d=0 \text{ je to } (a \pm c)$$
$$(a+bi)(c+di) = (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)i \quad | \text{pre } b, d=0 \text{ je to } (a \cdot c)$$

$$\text{pre } (c, d) \neq (0, 0) \text{ platí: } \frac{a+bi}{c+di} = \left(\frac{a \cdot c + b \cdot d}{c^2 + d^2} \right) + \left(\frac{b \cdot c - a \cdot d}{c^2 + d^2} \right) i \quad | \text{pre } b, d=0 \text{ je to } (a/c)$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(a \cdot c + b \cdot d) + (b \cdot c - a \cdot d)i}{c^2 - (di)^2} = \left(\frac{a \cdot c + b \cdot d}{c^2 + d^2} \right) + \left(\frac{b \cdot c - a \cdot d}{c^2 + d^2} \right) i$$

Absolútna hodnota komplexného čísla

$$|(a+bi)| = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Pre každé dve komplexné čísla z, v platí:

$$|z+v| \leq |z| + |v|, \quad |z-v| \geq |z| - |v|$$

$$|z \cdot v| = |z| \cdot |v|, \quad \left| \frac{z}{v} \right| = \frac{|z|}{|v|} \Leftrightarrow v \neq 0 + 0i$$

- **Goniometrický tvar komplexného čísla**

Zrejme z obrázka (na str. 1) platí:

$$\cos j = \frac{a}{|z|}, \quad \sin j = \frac{b}{|z|} \quad \text{potom}$$

$$z = a + bi = (a + bi) \cdot \frac{|z|}{|z|} = |z| \cdot \left(\frac{a}{|z|} + \frac{b}{|z|} i \right) = |z| \cdot (\cos j + i \cdot \sin j)$$

čo je žiadaný goniometrický tvar komplexného čísla. Tento predpis je aj prevodom medzi tvarmi komplexných čísel.

Počítanie s komplexnými číslami v goniometrickom tvare

z_1, φ a z_2, α

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(j + \alpha) + i \cdot \sin(j + \alpha))$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(j - \alpha) + i \cdot \sin(j - \alpha))$$

Moivrova veta

Zo vzťahu pre súčin komplexných čísel v goniometrickom tvare vyplýva Moivrova veta:

$$z^n = |z|^n \cdot (\cos(n \cdot j) + i \cdot \sin(n \cdot j))$$

-> podľa tejto vety sa dajú odvodiť aj vzťahy $\sin 2\alpha$ a $\cos 2\alpha$, a to riešením $(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)^2$

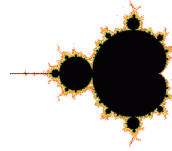
Odmocnina komplexného čísla

Nech $z = |z|(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ je komplexné číslo. Potom n -tá odmocnina čísla z je n rôznych komplexných čísel, ktoré môžeme vypočítať zo vzťahu:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos \frac{j + 2kp}{n} + i \cdot \sin \frac{j + 2kp}{n} \right) \quad \text{pre } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

Načo sa dajú komplexné čísla použiť?

- § Napr. dá sa pomocou nich odvodiť, že neexistuje rovnostranný trojuholník $A[ax, ay], B[bx, by], C[cx, cy]$, pre ktorý by platilo, že $ax, ay, bx, by, cx, cy \in \mathbb{N}$.
- § Alebo, čo je trochu zábavnejšie na vytváranie pekných obrázkov typu Mandelbrotova množina:



Pre záujemcov je tu definícia:

Nech c je číslo z komplexnej roviny. Nech postupnosť

$$\{z_0, z_1, z_2, z_3, \dots\}$$

je daná rekurentne vzťahmi:

$$z_0 = 0$$

$$z_{n+1} = f(z_n),$$

kde f je funkcia $f(z) = z^2 + c$.

Množinu všetkých čísel c z komplexnej roviny, pre ktoré je postupnosť $\{z_0, z_1, z_2, z_3, \dots\}$ ohraničená (t.j. $|z_n| < 2$), nazývame Mandelbrotova množina.

Komplexná jednotka

Komplexné číslo z , pre ktoré platí $|z|=1$, sa nazýva komplexná jednotka.

Komplexne združené čísla

Komplexné číslo $a-bi = z$ sa nazýva združené (konjugované) ku komplexnému číslu $a+bi = \bar{z}$. Ďalej platí: $\overline{\overline{z}} = z$,

$$z + \bar{z} = 2a \in \mathbb{R}, \quad z * \bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$$

Pre každé dve komplexné čísla z, v platí:

$$\overline{z + v} = \bar{z} + \bar{v}$$
$$\overline{z * v} = \bar{z} * \bar{v}$$

Zdroje:

P. Horák, L. Niepel: Prehľad matematiky, Alfa, 1.vydanie, Bratislava 1983.

e - <http://www.vscience.host.sk>