

## [MO24] Skúmanie vlastností funkcie diferenciálnym počtom

### Monotónnosť funkcie

-Def.: Nech je funkcia spojitá na intervale  $I$  a nech má vo vnútri intervalu  $I$  deriváciu. Potom je funkcia  $f$  na intervale  $I$  neklesajúca (nerastúca) práve vtedy, keď platí:  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ ) pre každé  $x$  z vnútra intervalu  $I$ .

Ak by sme však chceli skúmať či je funkcia monotónna pre potrebu zistenia, či sa k nej dá vytvoriť inverzná funkcia treba hľadať na to aby rovnosť  $f'(x) = 0$  platila pre najvyšší konečný počet bodov. To je vlastne postačujúca podmienka rýdzomonotónnosti.



Veta (porovnanie hodnôt funkcií): Nech sú funkcie  $f$  a  $g$  spojité na intervale  $\langle a, b \rangle$ , nech na intervale  $\langle a, b \rangle$  majú derivácie, pre ktoré platí  $f'(x) < g'(x)$ . Nech  $f(a) \leq g(a)$ . Potom na intervale  $\langle a, b \rangle$  platí  $f(x) < g(x)$

### Vypuklosť funkcie

Ak máme definovanú súradnicovú sústavu, má tvrdenie: bod  $P$  leží nad (pod) priamkou  $p$  ( $y = kx + q$ ) zmysel.

-Def.: Nech funkcia  $f$  je definovaná na intervale  $I$ . Ak pre každé tri body  $x_1, x_2, x_3$  z intervalu  $I$ , pre ktoré platí:  $x_1 < x_2 < x_3$ , máme: bod  $P_2 = (x_2, f(x_2))$  leží pod (nad) priamkou určenou bodmi  $P_1 = (x_1, f(x_1))$ ,  $P_3 = (x_3, f(x_3))$ , alebo leží na tejto priamke, potom sa funkcia  $f$  nazýva konvexná (konkávna) na intervale  $I$ .

Ak bod  $P_2$  leží vždy pod (nad) priamkou, určenou bodmi  $P_1, P_3$ , tak funkcia  $f$  je na intervale  $I$

rýdzokonvexná  (rýdzokonkávna ).

-Veta: Nech funkcia  $f$  je na intervale  $I$  spojitá a nech má vo vnútri intervalu  $I$  druhú deriváciu. Potom je funkcia  $f$  na intervale  $I$  konvexná (konkávna) práve vtedy, keď  $f''(x) \geq 0$  ( $f''(x) \leq 0$ ) pre každé  $x$  z vnútra intervalu  $I$ . Ak navyše rovnosť  $f''(x) = 0$  nastáva pre najvyšší konečný počet bodov, potom je funkcia na intervale  $I$  rýdzokonvexná (rýdzokonkávna).

### Inflexný bod

V inflexnom bode funkcia mení vypuklosť.

-Def.: Nech je funkcia  $f$  definovaná v bode  $x_0$ . Nech v niektorom ľavom okolí bodu  $x_0$  je rýdzokonvexná (rýdzokonkávna) a v niektorom pravom okolí bodu  $x_0$  rýdzokonkávna (rýdzokonvexná). Potom sa bod  $x_0$  nazýva inflexný bod funkcie  $f$ .

*Podmienka existencie inflexného bodu:* Nech funkcia  $f$  má v bode  $x_0$  tretiu deriváciu. Nech  $f''(x_0) = 0$  (poprípade druhá derivácia neexistuje, ale to nieje postačujúca podmienka) a  $f'''(x_0) \neq 0$ . Potom funkcia  $f$  má v bode  $x_0$  inflexný bod.

### Extrémy funkcie

-Def.: Pre lokálny extrém funkcie  $f$  v bode  $x_0$  platí  $f(x) \leq f(x_0)$  ( $f(x) \geq f(x_0)$ ). Ak navyše pre všetky  $x \in O(x_0)$  ( $O$  ako okolie.  $O = \langle x_0 - e, x_0 + e \rangle$ ), platí  $f(x) < f(x_0)$  ( $f(x) > f(x_0)$ ) hovoríme, že funkcia má v bode  $x_0$  ostré lokálne maximum (minimum).

Pre globálny extrém je  $x_0 \in D_f$ .

*Stacionárny bod:* preň platí  $f'(x_0) = 0$  pričom  $x_0 \in D_f$ .

-Veta: Nech funkcia  $f$  má v bode  $x_0$  lokálny extrém. Potom je  $x_0$  buď stacionárny bod funkcie  $f$ , alebo neexistuje derivácia funkcie  $f$  v bode  $x_0$ . Táto podmienka však nieje postačujúca (napr. pre  $f(x) = x^3$ ), preto ju treba rozšíriť:

- a. Ak existuje ľavé okolie bodu  $x_0 \in D_f$ , v ktorom je funkcia  $f$  rastúca (klesajúca) a existuje pravé okolie bodu  $x_0$ , v ktorom je funkcia  $f$  klesajúca (rastúca), tak potom má funkcia  $f$  v bode  $x_0$  ostré lokálne maximum (minimum).
- b. Špeciálne, ak  $f'(x_0) = 0$  a  $f''(x_0) \neq 0$ , tak funkcia  $f$  má v bode  $x_0$  ostrý lokálny extrém, a to
- $f''(x_0) < 0$  ~ ostré lokálne maximum
  - $f''(x_0) > 0$  ~ ostré lokálne minimum

### Asymptoty grafu funkcie

-Def.: Nech je daná funkcia  $f$ . Potom priamka  $y = kx + q$  sa nazýva asymptotou so smernicou grafu funkcie  $f$  pre  $x \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow -\infty$ ) práve vtedy, keď

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (kx + q)) = 0 \quad \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (kx + q)) = 0 \right).$$

Asymptota so smernicou (teda nie vertikálna) poskytuje veľmi dobrú predstavu o tom, ako vyzerá graf funkcie v globálnom pojatí. Pravdaže ku grafu funkcie existuje najviac jedna asymptota.

Pre  $k$  a  $q$  asymptoty platí:  $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ ,  $q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx)$ .

### Priebeh funkcie

Pri skúmaní priebehu funkcie (vychádzajúc z jej vlastností) obyčajne zisťujeme:

- a.  $D_f$
- b. body nespojitosti, intervaly spojitosti
- c. párnosť, nepárnosť, poriodickosť funkcie
- d. nulové body,  $f(x) = 0$
- e. intervaly monotónnosti, lokálne extrémny
- f. intervaly, v ktorých je funkcia konvexná (konkávna), inflexné body
- g. asymptoty
- h. body bez derivácie a pod.

---

### Lagrangeova veta o strednej hodnote

Nech je funkcia  $f$  spojitá v uzavretom intervale  $\langle a, b \rangle$  a nech má deriváciu v otvorenom intervale  $(a, b)$ . Potom existuje taký bod  $c \in (a, b)$ , že

$$f(a) - f(b) = (b - a) * f'(c) \quad \text{alebo} \quad \frac{f(a) - f(b)}{(b - a)} = f'(c)$$

### Zdroje:

P. Horák, Ľ. Niepel: Prehľad matematiky, Alfa, 1. vydanie, Bratislava 1983.